ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN DỰC

VỀ HÀM TỔNG - LCM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN DỰC

VỀ HÀM TỔNG - LCM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. Nông Quốc Chinh

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	tập số nguyên
$\mathrm{lcm}(a, b)$	BCNN của hai số nguyên a và b
$\gcd(a, b)$	ƯCLN của hai số nguyên a và b
$d \mid a$	d là ước của a
$f * g$	tích chập Dirichlet
$B_n(x)$	đa thức Bernoulli
$\varphi(n)$	hàm phi Euler
$\mu(n)$	hàm Möbius
$\zeta(s)$	hàm zeta Riemann

Lời mở đầu

Trong số học, bội chung nhỏ nhất (least common multiple) của hai số nguyên a và b là số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho cả a và b. Ước chung lớn nhất của hai số nguyên a và b là số nguyên dương lớn nhất là ước của cả hai số nguyên a, b. Các kiến thức về bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất đã được giảng dạy từ đầu bậc học trung học. Trong khi ước chung lớn nhất của hai số nguyên được nhiều nhà Toán học nghiên cứu và tìm được nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực toán học thì ngược lại, bội chung nhỏ nhất của hai số nguyên lại ít được nghiên cứu hơn rất nhiều.

Ngoài các tính chất cổ điển, ứng dụng và thuật toán để tính bội chung nhỏ nhất của hai số nguyên đã biết thì các kiến thức mở rộng về nó còn hạn chế. Hàm tổng bội chung nhỏ nhất

$$l(n) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{lcm}(j, n)$$

được nghiên cứu bởi một số tác giả. Năm 1975, Alladi [1] nghiên cứu tổng

$$\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{lcm}(j, n))^r \quad (r \in \mathbb{R}, r \geq 1)$$

và thu được

$$\sum_{n \leq x} \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{lcm}(j, n))^r = \frac{\zeta(r+2)}{2(r+1)^2 \zeta(2)} x^{2r+2} + O(x^{2r+1+\varepsilon}),$$

Năm 2007, Bordellès [2] cải tiến sai số trong kết quả của Alladi trong trường hợp $r = 1$ và mở rộng cho trường hợp $r = -1$ bằng các kết quả sau

$$l(n) = \frac{1}{2}((\mathrm{Id}^2 \cdot(\varphi + \tau_0)) * \mathrm{Id})(n),$$

$$\sum_{n\le x}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{lcm}(j,n) = \frac{\zeta(3)}{8\zeta(2)}x^4 + O(x^3(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3})\ (x > e),$$

$$\sum_{n\le x}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{lcm}(j,n)} = \frac{(\log x)^3}{6\zeta(2)} + \frac{(\log x)^2}{2\zeta(2)}\left(\gamma + \log\left(\frac{\mathcal{A}^{12}}{2\pi}\right)\right) + O(\log x),$$

trong đó $\mathrm{Id}^a = n^a$ $(a \in \mathbb{Z})$,

$$\tau_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } n = 1; \\ 0, & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

$F * G$ là tích chập Dirichlet thông thường, và $\mathcal{A}$ là hằng số Glaisher-Kinkelin.

Gần đây nhất, năm 2014, Ikeda và Matsuoka [3] định nghĩa hai hàm

$$L_a(n) := \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{lcm}(j,n))^a$$

$$T_a(x) := \sum_{n\le x} L_a(n)$$

với mọi $a \in \mathbb{Z}$ và $x \ge 1$. Các tác giả nghiên cứu $T_a(x)$ với $a \ge 2$:

$$\sum_{n\le x} L_a(n) = \frac{\zeta(a+2)}{2(a+1)^2\zeta(2)}x^{2a+2} + O(x^{2a+1}(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3})$$

khi $x \to \infty$, trong đó hằng số sinh ra chỉ phụ thuộc a, $x \ge 1$ và $k \in \mathbb{N}$ với $k \ge 2$. Với $a \le -2$, các tác giả thu được: với $x \ge 1$ và $k \in \mathbb{N}$ với $k \ge 2$, thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_{-k}(n) = \frac{\zeta(k)}{2}\left(1 + \frac{\zeta(k)^2}{\zeta(2k)}\right)$$

và

$$\sum_{n\le x} L_{-k}(n) = \frac{\zeta(k)}{2}\left(1 + \frac{\zeta(k)^2}{\zeta(2k)}\right) - \frac{\zeta(k)x^{-k+1}\log x}{(k-1)\zeta(k+1)} + O(x^{-k+1})$$

khi $x \to \infty$, trong đó hằng số sinh ra chỉ phụ thuộc vào k.

Mục tiêu của luận văn này là tổng hợp các tính chất của bội chung nhỏ nhất và trình bày kết quả về hàm tổng bội chung nhỏ nhất. Xuất phát từ những lí do đó nên tôi mạnh dạn chọn đề tài: "**Về hàm tổng - Lcm**" dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nông Quốc Chinh.

Ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo, bố cục của luận văn gồm ba chương. Chương I trình bày những kiến thức chuẩn bị là cơ sở lý thuyết cho chương sau, bao gồm các khái niệm về bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất, mối liên hệ giữa bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất, các cách tính bội chung nhỏ nhất. Chương II trình bày các đánh giá về giá trị hàm tổng bội chung nhỏ nhất. Các kết quả này nằm trong hai bài báo của Bordellès trong [2] và của S. Ikeda và K. Matsuoka trong [3]. Chương III đưa ra ứng dụng lý thuyết về bội chung nhỏ nhất của các số nguyên dương trong Toán học phổ thông.

Lời đầu tiên, tôi xin kính gửi lời cảm ơn sâu sắc và chân thành nhất tới PGS. TS. Nông Quốc Chinh - Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên vì sự tận tình giúp đỡ và chỉ bảo của thầy đối với tôi trong thời gian làm luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến Quý Thầy Cô Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy tôi trong suốt khóa học. Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo - Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tại trường.

Xin gửi lời cảm ơn đến Quý Thầy, Cô trong Hội đồng chấm luận văn đã dành thời gian quý báu để đọc, chỉnh sửa, góp ý và phản biện cho tôi hoàn thành luận văn này một cách hoàn chỉnh nhất.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2016

Học viên

Phạm Văn Dực

Chương 1

Một vài tính chất của bội chung nhỏ nhất

Chương này trình bày những kiến thức chuẩn bị là cơ sở lý thuyết cho chương sau, bao gồm các khái niệm về bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất, mối liên hệ giữa bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất, các cách tính bội chung nhỏ nhất. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu trong các tài liệu [4, 5, 6].

1.1 Khái niệm

Trong lý thuyết số, tập *số tự nhiên* là

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

và tập *số nguyên* là

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. Số nguyên k được gọi là *bội số* của một số nguyên a khi và chỉ khi tồn tại một số nguyên b sao cho $k = ab$. Trong trường hợp này ta cũng nói k chia hết cho a.

Định nghĩa 1.1.2. Một số nguyên dương k được gọi là *bội chung* của hai số nguyên a và b nếu k là bội số của a và k cũng là bội số của b.

Tương tự ta cũng có định nghĩa bội số chung của n số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Định nghĩa 1.1.3. Số nguyên dương k được gọi là *bội chung nhỏ nhất* của hai số nguyên a và b nếu k là bội số chung của a và b và với mọi số nguyên dương k' là bội chung của a và b thì $k \leq k'$. Ký hiệu $\operatorname{lcm}(a, b) = k$.

Ví dụ 1.1.4. Các bội của 4 là:

$$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, \ldots$$

và các bội của 6 là:

$$6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, \ldots$$

Bội chung của 4 và 6 là các số cùng thuộc cả hai danh sách trên:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots$$

Do đó, từ danh sách một vài bội chung đầu tiên của 4 và 6 này, bội chung nhỏ nhất của 4 và 6 là $\operatorname{lcm}(4, 6) = 12$.

Khi cộng, trừ, hay so sánh các phân số tầm thường, một cách đơn giản là tìm bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số, thường được gọi là mẫu số chung nhỏ nhất, bởi vì mỗi phân số có thể được biểu diễn thành một phân số với mẫu số này. Ví dụ,

$$\frac{2}{21} + \frac{1}{6} = \frac{4}{42} + \frac{7}{42} = \frac{11}{42}$$

trong đó mẫu số 42 là bội chung nhỏ nhất của 21 và 6.

Mệnh đề 1.1.5. Bội chung nhỏ nhất của hai số nguyên a và b là tồn tại và duy nhất.

Chứng minh. Cho trước hai số nguyên a và b, khi đó $|ab|$ là bội chung của a và b. Do đó luôn tồn tại bội chung của hai số. Suy ra tập tất cả các bội chung của a và b khác rỗng. Theo nguyên lý sắp thứ tự tốt (well-ordering principle), mọi tập số nguyên dương khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất. Do đó tồn tại $\operatorname{lcm}(a, b)$.

Để chứng minh tính duy nhất, gọi $m = \text{lcm}(a, b), n = \text{lcm}(a, b)$. Khi đó ta có với mọi số nguyên dương c sao cho $a \mid c$ và $b \mid c$ thì $m \mid c$. Vậy ta có $m \mid n$ và $n \mid m$. Suy ra $m = \pm n$. Do $m, n > 0, m = n$. □

Định nghĩa 1.1.6. Một số nguyên d được gọi là *ước số* của số nguyên a khi và chỉ khi tồn tại một số nguyên b sao cho $a = bd$. Ký hiệu $d \mid a$.

Định nghĩa 1.1.7. Một số nguyên p được gọi là *số nguyên tố* nếu

(i) $p > 1$,

(ii) p không có ước số ngoại trừ 1 và p.

Ví dụ, 37 là một số nguyên tố, 1 không phải là một số nguyên tố. Mọi số nguyên lớn hơn 1 không phải là số nguyên tố được gọi là *hợp số*.

Định lý 1.1.8. *Mọi số nguyên dương, ngoại trừ 1, đều là tích của các số nguyên tố.*

Chứng minh. Hoặc n là số nguyên tố thì $n = 1 \cdot n$, hoặc n là hợp số có ước nằm giữa 1 và n. Nếu m là ước số nhỏ nhất của n, m là số nguyên tố. Thật vậy, vì nếu ngược lại, tồn tại l sao cho $1 < l < m$ và $l \mid m$ kéo theo $l \mid n$, mẫu thuẫn với định nghĩa của m. Vậy m là số nguyên tố.

Do đó n là số nguyên tố hoặc n chia hết cho một số nguyên tố nhỏ hơn n, đặt là p_1, trong trường hợp này

$$n = p_1 n_1, \quad 1 < n_1 < n.$$

Ở đây, hoặc n_1 là số nguyên tố, ta chứng minh xong, hoặc nó chia hết cho số nguyên tố p_2 lớn hơn 1, trong trường hợp này

$$n = p_1 n_1 = p_1 p_2 n_2, \quad 1 < n_2 < n_1 < n.$$

Lập luận tương tự, ta thu được một dãy số giảm $n, n_1, \ldots, n_{k-1}, \ldots$ tất cả đều lớn hơn 1. Sớm hay muộn ta sẽ gặp n_{k-1} là một số nguyên tố, đặt là p_k, và khi đó

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k. \tag{1.1}$$